P7 – Lois de Kepler
Mécanique du point

« Qui de la terre ou du soleil tourne autour de l'autre, cela est profondément indifférent. »

Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe*.

I. Lois de Kepler

1. Prémisses

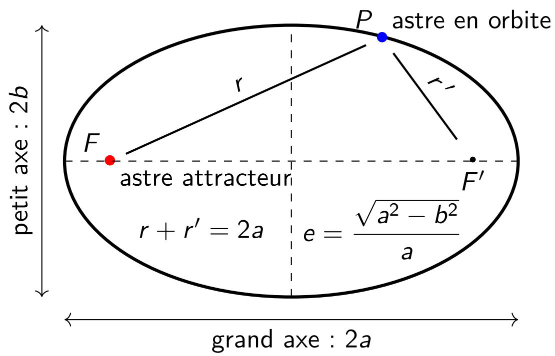
Nicolas Copernic (1473-1543) : il est le premier à remettre en cause la théorie du géocentrisme d'Aristote si chère à l'église en adoptant l'héliocentrisme.

Tycho Brahe (1546-1601) : il n'adopte pas l'héliocentrisme, mais une théorie hybride, le géo-héliocentrisme. Il considère cependant que l'astronomie doit être fondée sur l'observation et effectue des mesures très précises du mouvement des planètes.

Johannes Kepler (1571-1630) : convaincu par l'héliocentrisme il est assistant de Tycho Brahe, à partir des mesures de ce dernier il érige ses trois lois sur le mouvement des planètes qui assoient définitivement l'héliocentrisme.

2. Première loi : loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil est l'un des foyers.

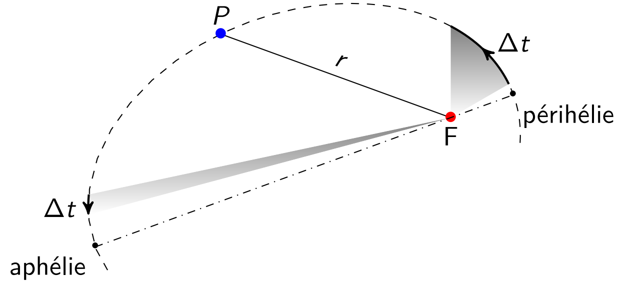


Remarque

Les lois de Kepler restent valables pour tout astre en orbite autour d'un autre astre attracteur.

3. Deuxième loi : loi des aires

Le rayon allant du Soleil à la planète balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.

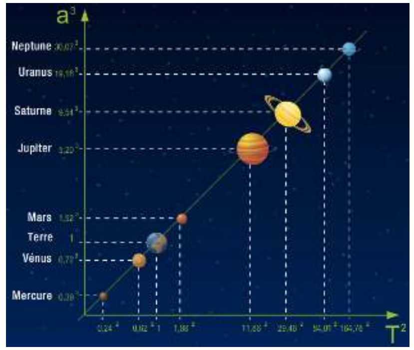


Conséquences

- Le mouvement des planètes n'est pas uniforme.
- La vitesse est maximale au périhélie.
- La vitesse est minimale à l'aphélie.

4. Troisième loi : loi des périodes

Le rapport du carré de la période de révolution T d'une planète autour du soleil au cube du demi-grand axe a de l'ellipse est constant.



$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

T : période de révolution (s)
a : demi grand axe (m)
k : constante ($s^2 \cdot m^{-3}$)

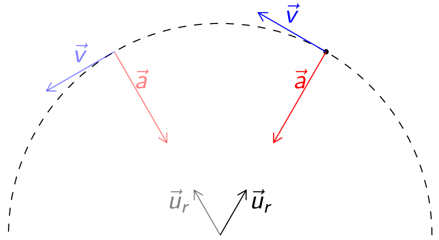
Remarques

- La constante dépend de l'astre attracteur :
  Elle est la même pour toutes les planètes du système solaire.
  Elle est la même pour tous les satellites de Jupiter (par ex.).
  Mais elle est différente pour les planètes et les satellites de chaque planète.
- Si le mouvement est circulaire alors $a = R$.

Ex. 11 p. 215 : période de Jupiter

II. Mouvement circulaire uniforme

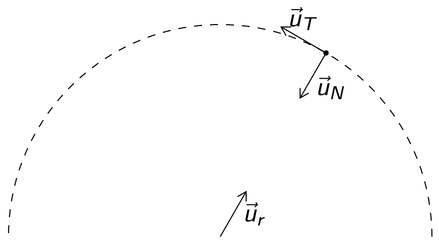
1. Caractéristiques



Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par :
- une vitesse constante,
- une accélération centripète.

Remarque
Les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{a}$ et $\vec{v}$ ne sont pas constants, il dépendent du temps.

2. Repère de Frénet



Le repère de Frénet est constitué de :
- $\vec{u}_T$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire,
- $\vec{u}_N$ un vecteur unitaire normal à la trajectoire (qui pointe vers le centre de courbure).

On montre que dans le repère de Frénet :

$$\boxed{\vec{v} = v\ \vec{u}_T}$$

Accélération normale

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{r}\ \vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\ \vec{u}_T}$$

Accélération tangentielle

Signification des accélérations
- L'accélération normale est à l'origine du changement de direction du vecteur vitesse.
- L'accélération tangentielle est à l'origine du changement de la valeur de la vitesse.

Cas du mouvement circulaire uniforme
- Le mouvement est uniforme donc $\dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = 0$.
- Dans le repère de Frénet, $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_N$.
- L'accélération est centripète et de valeur $a = \dfrac{v^2}{r}$.

Ex. 4 p. 214 : accélération dans un virage

III. Mouvement des planètes et des satellites

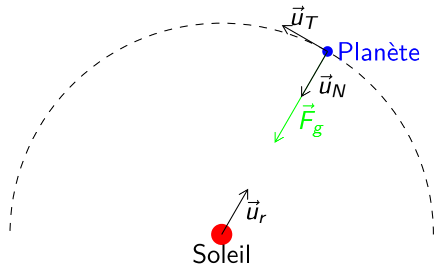
1. Application de la deuxième loi de Newton

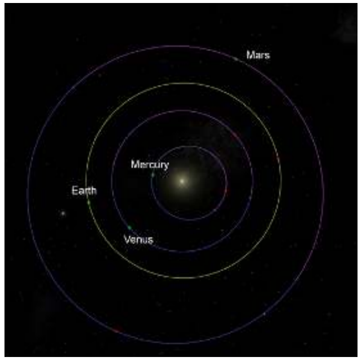
On considère une planète en orbite autour du Soleil. On suppose que celle-ci n'est soumise qu'à la force de gravitation du Soleil :

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_S M_P}{r^2}\vec{u}_r$$

On se place dans le repère de Frénet :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\vec{u}_T.$$





Les trajectoires des planètes sont des ellipses de faible excentricité. Pour simplifier, on suppose que le mouvement est circulaire ($\vec{u}_r = -\vec{u}_N$) :

$$\vec{F}_g = G\frac{M_S M_P}{r^2}\vec{u}_N$$

D'après la deuxième loi de Newton : $M_P\,\vec{a} = \vec{F}_g$

$$M_P\left(\frac{v^2}{r}\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\vec{u}_T\right) = G\frac{M_S M_P}{r^2}\vec{u}_N$$

$$\frac{v^2}{r}\vec{u}_N + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\vec{u}_T = G\frac{M_S}{r^2}\vec{u}_N$$

Par identification on voit que l'accélération tangentielle est nulle :

$$\frac{v^2}{r}\vec{u}_N = \frac{GM_S}{r^2}\vec{u}_N$$

Donc si le mouvement est circulaire, il est aussi uniforme, et on peut déterminer sa vitesse :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2} \iff v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

Remarques
- Ces résultats peuvent être généralisés au mouvement des satellites autour des planètes et à tout corps en orbite autour d'un autre corps attracteur.
- La vitesse du corps en orbite est indépendante de sa masse, elle dépend de la masse du corps attracteur.
- À chaque orbite correspond une vitesse, qui décroît avec le rayon de l'orbite.

Ex. 5 p. 214 : satellites de Mars

2. Détermination de la constante de Kepler

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_a}{r}}$$

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_a}}$$

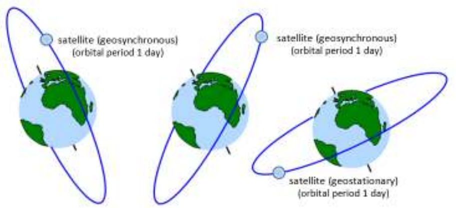
$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_a}}$$

T : période (s)
r : rayon de l'orbite (m)
M_a : Masse de l'astre attracteur (kg)
G : Constante de gravitation ($6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$)

Remarque
Pour un satellite terrestre il faut tenir compte du rayon terrestre R_T et de l'altitude h du satellite : $r = R_T + h$.

3. Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste toujours à la verticale du même lieu.



Propriétés de l'orbite
- L'orbite est dans le plan équatorial.
- La période est d'un jour sidéral :
  23 h 56 min 4 s ($\neq$ jour solaire).

Calcul de l'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$(R_T+h)^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$$

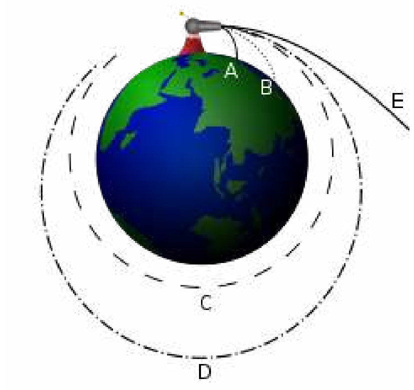
$$R_T + h = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$$

$$h = \left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 86164^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 6{,}38 \times 10^6$$

$$h = 3{,}58 \times 10^7\ \mathrm{m} \ = 3{,}58 \times 10^4\ \mathrm{km}$$

4. Chute libre et impesanteur



Le satellite est en chute libre, c'est pourquoi son mouvement est indépendant de sa masse ! (cf. P6)

La chute permanente du satellite provoque l'état d'impesanteur à son bord.