P6 – Lois de Newton
Mécanique du point

« I can calculate the motion of heavenly bodies, but not the madness of people. »

Isaac Newton.

I. Cinématique du point

1. Vecteur accélération

L'accélération (en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) représente la variation de la vitesse. Pour une accélération de $10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ la vitesse augmente de $10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à chaque seconde.
Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse instantanée :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \text{ ou } \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}\,v_z}{\mathrm{d}\,t}\,\vec{k}$$

$$\text{soit } \vec{a} \begin{pmatrix} a_x = v_x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t} \\ a_y = v_y'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t} \\ a_z = v_z'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_z}{\mathrm{d}\,t} \end{pmatrix}, \text{ avec } a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

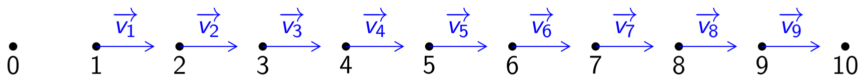
Remarque
Le vecteur accélération est aussi la dérivée seconde du vecteur position.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2\,z}{\mathrm{d}\,t^2}\,\vec{k}$$

2. Exemples de mouvements

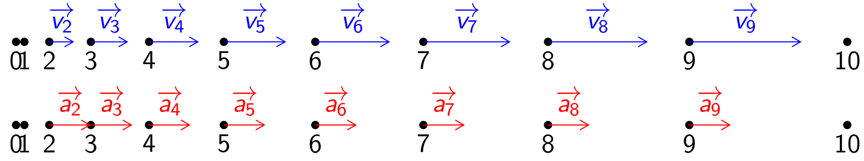
Dans chacun des cas suivants où les positions successives sont séparées par le même intervalle de temps ; représenter, sans souci d'échelle, les vecteurs vitesse et accélération aux différentes dates. Préciser la nature du mouvement.

Mouvement 1



- $\vec{v}(t) = \overrightarrow{\text{cst}}$
- Le mouvement est rectiligne uniforme.
- $\vec{a}(t) = \vec{0}$

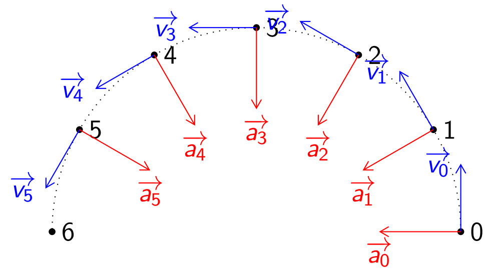
Mouvement 2



- $\Delta\vec{v}(t) = \overrightarrow{\text{cst}}$
- $\vec{a}(t) = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \overrightarrow{\text{cst}}$
- Le mouvement est uniformément accéléré.

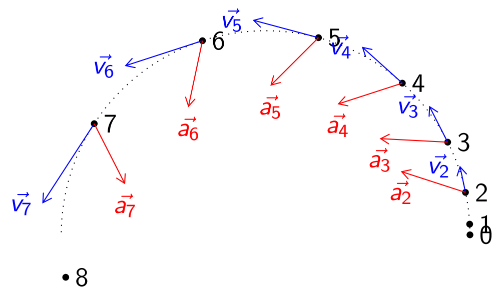
Ex. 3 p. 194 : mouvement uniformément varié

Mouvement 3



- $\vec{v}(t) \neq \overrightarrow{\text{cst}}$
- $\|\vec{v}(t)\| = cste$, le mouvement est uniforme.
- Le mouvement est circulaire uniforme.
- $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$, l'accélération est centripète.

Mouvement 4



- $\vec{v}(t) \neq \overrightarrow{\text{cst}}$, $\|\vec{v}(t)\| \neq cste$
- Le mouvement est circulaire accéléré.
- $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) > 0$

Ex. 4 p. 194 : représentation de la vitesse et de l'accélération

II. Lois de Newton

1. Première loi : principe d'inertie

Il existe des référentiels dans lesquels le principe d'inertie (cf. P5) s'applique.

Ces référentiels sont appelés référentiels galiléens (ou inertiels).

Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui même galiléen.

Exemples de référentiels

- Le référentiel terrestre est localement galiléen, mais il ne l'est pas à « grande » échelle (pendule de Foucault, marées, vents...).
- Le référentiel d'un manège (ou d'une personne tournant sur elle-même) n'est pas galiléen, on y ressent l'action de la « l'accélération centrifuge ».

2. Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Ce principe est d'une grande importance pratique cas il permet de prévoir la trajectoire d'un corps si les forces qui s'exercent sur lui sont connues.

Dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \sum \overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}}$$

$\vec{p}$: quantité de mouvement ($\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$)
$\overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}$: forces extérieures au système étudié (N)

La quantité de mouvement dépend elle même de grandeurs qui peuvent dépendre du temps :

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(m\vec{v})$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$$

$$m = cste \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = m\vec{a}$$

Donc si la masse m du système est constante :

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}}$$

m : masse (kg)
$\vec{a}$: accélération ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)
$\overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}$: forces extérieures au système étudié (N)

Exemples d'application

- Voiture : le carburant représente une faible fraction de la masse de la voiture et la consommation est étalée sur plusieurs heures $\Rightarrow$ la masse est considérée constante.
  On applique $m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}$.
- Fusée : le carburant représente plus de 95 % de la masse de la fusée, les propulseurs consomment plusieurs tonnes de poudre/ergols par seconde pendant quelques minutes ou dizaines de minute $\Rightarrow$ la masse n'est pas constante !
  On applique $\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \sum \overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}}$.

3. Troisième loi : principe d'action - réaction

Si deux corps A et B interagissent l'un sur l'autre alors :

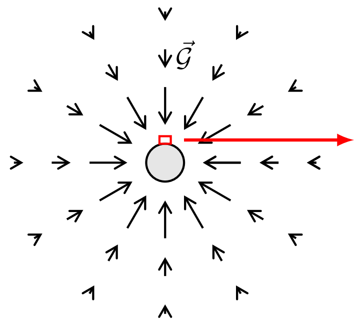
$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{A/B}} = -\overrightarrow{F}_{\mathrm{B/A}}}$$

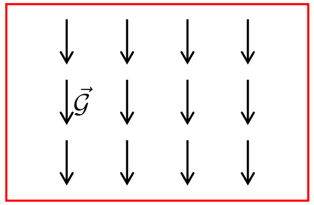
Exemple
La Terre exerce une force d'attraction gravitationnelle sur nous (notre poids), et nous exerçons une force opposée et de même valeur sur elle.

III. Applications du PFD

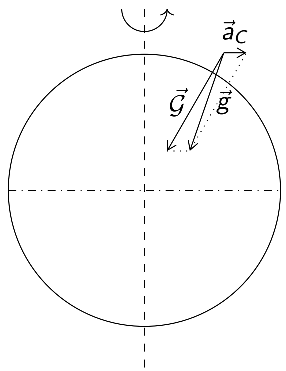
1. Rappel : champ de pesanteur

cf. 1S : P4 – Champs





Localement, les champs de gravitation et de pesanteur peuvent être considérés comme uniformes.



Différences entre champs de pesanteur et de gravitation

$\vec{g}$ diffère de $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}_r$ car :

- la rotation de la Terre induit une accélération ($\vec{a}_C$),
- la Terre est aplatie aux pôles,
- la croûte terrestre n'est pas uniforme...

2. Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

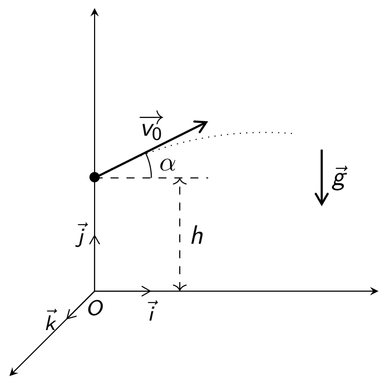
- On considère la chute d'un corps de masse m constante et de vitesse initiale $\vec{v_0}$.
- On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Le champ de pesanteur est supposé constant à l'échelle de la trajectoire.

— La vitesse est suffisamment faible pour négliger les frottements.

Remarque sur la chute
Une chute n'est pas synonyme de descente ! Un corps en chute peut monter si sa vitesse initiale n'est pas nulle.

Rappel : chute libre

— Un corps est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son propre poids.
— Les forces de frottement sont négligeables.
— L'énergie mécanique est conservée.



Bilan des forces :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{j}$

La masse m est constante, donc d'après la deuxième loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{P}$

$m\vec{a} = m\vec{g}$

$\vec{a} = \vec{g}$

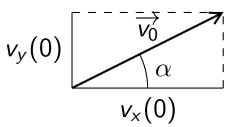
$\vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque
Le mouvement de chute libre est indépendant de la masse du corps en chute !

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$ donc $\vec{v}$ est une primitive de $\vec{a}$:

$$\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 - gt \\ v_z = C_3 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$:



$$\begin{aligned} C_1 &= v_x(0) = v_0 \cos\alpha \\ C_2 &= v_y(0) = v_0 \sin\alpha \\ C_3 &= v_z(0) = 0 \end{aligned}$$

On obtient les équations de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est une primitive de $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = C_4 + v_0 \cos(\alpha)\ t \\ y = C_5 + v_0 \sin(\alpha)\ t - \dfrac{1}{2} g t^2 \\ z = C_6 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0) = h\,\vec{j}$:

$$\begin{aligned} C_4 &= x(0) = 0 \\ C_5 &= y(0) = h \\ C_6 &= z(0) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)\ t \\ y(t) = h + v_0 \sin(\alpha)\ t - \dfrac{1}{2} g t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

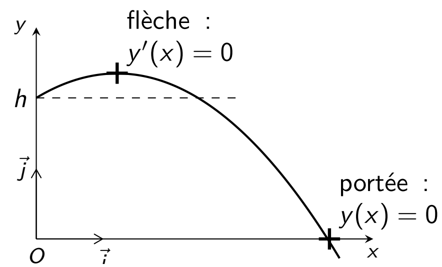
Il reste à déterminer l'équation de la trajectoire de la forme $y(x)$:

$x = v_0 \cos(\alpha)\ t \qquad$ donc $\qquad t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$y = h + v_0 \sin\alpha\ \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

On obtient la parabole d'équation :

$$y = h + \tan(\alpha)\ x - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}\ x^2$$



Calcul de la flèche :

$$y'(x) = \tan\alpha - \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2}\ x$$

$$y'(x_f) = 0 \iff \tan\alpha - \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2}\ x_f = 0$$

$$y'(x_f) = 0 \iff x_f = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$y(x_f) = h + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

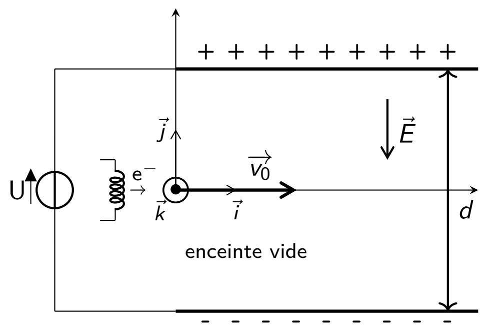
Calcul de la portée :

$$y(x_p) = 0 \Longleftrightarrow h + \tan(\alpha)\, x_p - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}\, x_p^2 = 0$$

$$x_p = \frac{-\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{4gh}{2(v_0\cos\alpha)^2}}}{-\frac{2g}{2(v_0\cos\alpha)^2}}, \quad \left(x_p > 0,\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

$$x_p = \frac{v_0\cos\alpha}{g}\left(v_0\sin\alpha + \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gh}\right)$$

3. Mouvement dans un champ électrique uniforme



Bilan des forces sur un électron (e^-) :

Force électrique $\vec{F_e} = q\vec{E} = \frac{eU}{d}\,\vec{j}$

Poids $\vec{P}$ négligeable $\left(\frac{P}{F_e} \ll 1\right)$.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m_e\vec{a} = \vec{F_e}$$

$$m_e\vec{a} = \frac{eU}{d}\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{eU}{m_e d}\,\vec{j} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{eU}{m_e d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque
Le mouvement dépend de la masse !

$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t}$ donc $\vec{v}$ est une primitive de $\vec{a}$:

$$\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 + \frac{eU}{m_e d}\, t \\ v_z = C_3 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$:

$$C_1 = v_x(0) = v_0$$
$$C_2 = v_y(0) = 0$$
$$C_3 = v_z(0) = 0$$

On obtient les équations de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{eU}{m_e d}\, t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,t}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est une primitive de $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = C_4 + v_0 t \\ y = C_5 + \frac{1}{2}\frac{eU}{m_e d}\, t^2 \\ z = C_6 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0) = h\,\vec{j}$:

$$C_4 = x(0) = 0$$
$$C_5 = y(0) = 0$$
$$C_6 = z(0) = 0$$

On en déduit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\, t \\ y(t) = \frac{eU}{2m_e d}\, t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Il reste à déterminer l'équation de la trajectoire de la forme $y(x)$:

$x = v_0\, t \qquad$ donc $\qquad t = \frac{x}{v_0}$

$$y = \frac{eU}{2m_e d}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

On obtient la parabole d'équation :

$$y = \frac{eU}{2m_e d v_0^2}\, x^2$$