P10 – Relativité restreinte
Initiation à la relativité du temps

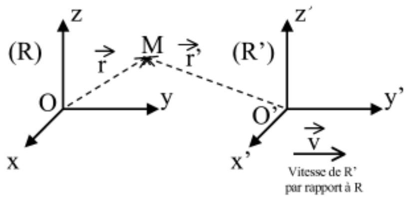
« Grossmann, il faut que tu m'aides, sinon je vais devenir fou. »

Albert Einstein à son ami mathématicien Marcel Grossman.

I. Aspects historiques

1. Principe de relativité et transformations galiléennes

Principe de relativité :
— les lois de la nature sont universelles,
— mais pas tout à fait...
— elles sont les mêmes dans des référentiels galiléens (ou inertiels),
— en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.



Transformation galiléenne :
— le temps est absolu (le même dans tous les référentiels),
— addition des vitesses $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{v}$,
— $x = x' + vt$.

2. La théorie de Maxwell et l'éther

James Clerck Maxwell rassemble et finalise la théorie de l'électromagnétisme en quatre équations (1865).

La théorie prévoit l'existence d'ondes électromagnétiques (lumière...).

Mais au XIXème siècle...
— on ne connaît aucune onde se propageant dans le vide,
— on suppose donc un milieu de propagation : l'éther,
— et si on applique la loi galiléenne d'addition des vitesses,
— les équations de Maxwell ne sont valables que dans le référentiel de l'éther !

3. La vitesse de la lumière et l'expérience de Michelson et Morley

En 1849, Hyppolyte Fizeau met au point le premier dispositif permettant de mesurer la vitesse de la lumière en laboratoire. Au cours du XIXème siècle son dispositif sera amélioré et les mesures de la vitesse de la lumière deviennent de plus en plus précises.

En 1881, Albert Michelson invente l'interféromètre de Michelson, il devient possible de mesurer les variations de la vitesse de la lumière dues au déplacement de la Terre (prix Nobel 1907).

Michelson et Morley pensent mesurer des vitesses différentes dans la direction du mouvement de la Terre et perpendiculairement à celle-ci et mettre en évidence l'éther.

Mais les vitesses qu'ils mesurent sont les mêmes dans toutes les directions.

▶ Expérience de Michelson et Morley ▶ Expérience de Michelson et Morley (2)

II. Postulats de la relativité restreinte

1. Principe de relativité restreinte

Au début du XXème siècle les physiciens sont confrontés à un dilemme.

— Soit les transformations galiléennes sont justes et il faut abandonner le principe de relativité car les lois de Maxwell ne peuvent s'appliquer dans tous les référentiels.
— Soit les transformations galiléennes, aussi intuitives soit-elles, sont fausses et dans ce cas les transformations possibles (découvertes par Hendrick Lorentz et Henri Poincaré) impliquent la relativité de l'espace et du temps.

Albert Einstein fait le saut en 1905, selon lui, c'est l'universalité des lois qui prime et il faut abandonner l'idée d'un temps absolu.

Il pose le premier postulat de la relativité restreinte : il existe une classe de référentiel, les référentiels inertiels, dans lesquelles les lois de la nature ont la même forme.

2. Homogénéité, isotropie et causalité

Le postulat de relativité est insuffisant pour construire la théorie de la relativité restreinte. Einstein a besoin d'un second postulat, l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels.

Ce postulat historique et très restrictif n'est pas nécessaire, on a démontré par la suite que la relativité restreinte peut être construite à partir des principes plus généraux qui sont :
— l'homogénéité de l'espace,
— l'isotropie de l'espace,

— la causalité.

Une vitesse limite apparaît comme conséquence, c'est la vitesse de la lumière dans le vide.

Ainsi la découverte d'une vitesse supraluminique ne remettrait pas en cause la théorie de la relativité, mais ferait simplement apparaître une nouvelle constante prenant la place de c.

III. Conséquences

1. Vitesse limite

Vitesse de la lumière
La vitesse de la lumière dans le vide est une vitesse limite qui ne peut être dépassée par un corps matériel.

$$c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Remarque
Une autre résultat extraordinaire est l'équivalence masse-énergie qui s'exprime, au repos, par la célèbre formule :

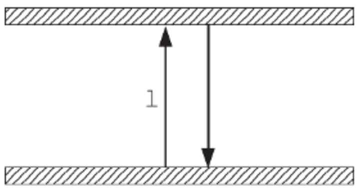
$$E = mc^2$$

La masse n'est donc pas nécessairement conservée, et le rapport de l'énergie à la masse est énorme !

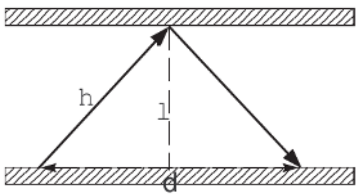
2. Relativité du temps

Dans un train en mouvement rectiligne uniforme, on mesure le temps d'aller-retour d'un faisceau lumineux sur un miroir. La vitesse de la lumière est supposée constante.

► Alice in the train and Bob at the station



Le point de vue d'Alice dans le train



Le point de vue de Bob sur le quai

Du point de vue d'Alice, dans le train : $\Delta t = \dfrac{2l}{c}$

Du point de vue de Bob, sur le quai : $\Delta t' = \dfrac{2h}{c}$

Comme le train avance : $d = v\Delta t'$

En appliquant le théorème de Pythagore : $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + l^2 = h^2$

En remplaçant : $\left(\dfrac{v\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{c\Delta t'}{2}\right)^2$

En simplifiant et en factorisant : $c^2\Delta t^2 = (c^2 - v^2)\Delta t'^2$

Et finalement : $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Le temps n'est pas absolu !

Conclusion
La durée est plus longue pour l'observateur en mouvement que pour l'observateur immobile par rapport au phénomène observé, elle tend vers l'infini quand la vitesse relative des deux observateurs tend vers c.

Référentiel propre
Le référentiel propre d'un corps est le référentiel lié à ce corps. Tout corps est immobile dans son référentiel propre.

Événement
Un événement a lieu à un endroit et à un instant précis, il est caractérisé par ses coordonnés spatiales (un point dans l'espace) et sa coordonnée temporelle (un point dans le temps), autrement dit c'est un point de l'espace-temps à quatre dimensions (x, y, z, t).

Durée relative à un référentiel en mouvement rectiligne uniforme
Soit deux événements ayant lieu au même point du référentiel propre $\mathcal{R}$ d'un corps et Δt la durée entre ces deux événements. Soit un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
Alors la durée $\Delta t'$ entre ces deux événements dans le référentiel $\mathcal{R}'$ devient :

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}}$$

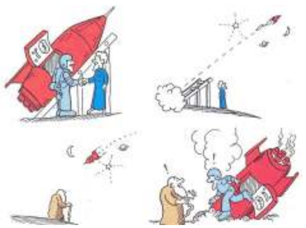
$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Remarques
- $0 \leq \beta < 1$ et $\gamma > 1$.
- Dans le cas d'un mouvement non relativiste $v \ll c$, $\beta \simeq 0$, $\gamma \simeq 1$, et donc $\Delta t' = \Delta t$. On retrouve le résultat classique d'un temps absolu.

Application
Les conditions précédentes s'appliquent à la durée de vie d'une particule : la particule « vivra » plus longtemps dans un autre référentiel que dans son référentiel propre, en particulier si la particule se déplace vite, comme c'est le cas :
- dans un accélérateur, Ex. 10 p. 253,
- pour des particules cosmiques.

IV. Événements spatialement au même point d'un référentiel propre

1. Voyage subluminique



Le « paradoxe » des jumeaux (ou de Langevin)

On considère un voyageur pouvant se déplacer à une vitesse proche de la lumière, $\beta = 0,990$. Ce voyageur souhaite se rendre sur le système stellaire le plus proche du soleil, Proxima du Centaure, situé à une distance d=4,23 al de la Terre.

1) Le voyageur est-il relativiste ?

Le voyageur se déplace à 99,0 % de la vitesse de la lumière, il est éminemment relativiste ! Il faut tenir compte des effets relativistes.

2) Du point de vue terrestre, le voyageur pourra t-il fêter son prochain anniversaire sur Proxima du Centaure ?

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}'$, le voyageur se déplace à la vitesse $v = \beta c$ et doit parcourir la distance d donc la durée $\Delta t'$ du voyage dans le référentiel terrestre est :

$$\Delta t' = \frac{d}{\beta c} = \frac{d(\text{al})}{\beta}$$

$\Delta t' = \dfrac{4,23}{0,99} = 4{,}19\,\text{ans}$

Du point de vue terrestre le voyage va prendre plus de 4 ans, le voyageur ne pourra pas fêter son prochain anniversaire sur Proxima du Centaure.

3) Quelle est la durée réelle du voyage pour le voyageur ?

La durée Δt du voyage pour le voyageur est la durée dans son référentiel propre $\mathcal{R}$. Dans le référentiel du voyageur, le départ et l'arrivée du voyage se font au même point de l'espace. Les deux événements ont lieu au même point spatial du référentiel propre du voyageur, on peut donc appliquer la formule $\Delta t' = \gamma \Delta t$.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \Delta t' \sqrt{1-\beta^2} = \frac{d(\text{al})}{\beta}\sqrt{1-\beta^2} = d(\text{al})\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}$$

$\Delta t' = 4,23 \times \sqrt{\dfrac{1}{0,99^2} - 1} = 0{,}60\,\text{an}$

Du point de vue du voyageur, le voyage dure moins d'un an, il pourra donc fêter son prochain anniversaire sur Proxima du Centaure.

4) Quelle est la différence d'âge entre les deux jumeaux lors du retour du jumeau voyageur ?

On peut appliquer le même raisonnement lors du retour du jumeau sur Terre.
La différence d'âge Δa entre les jumeaux est donc :

$$\Delta a = 2(\Delta t' - \Delta t) = 2\frac{d(\text{al})}{\beta}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

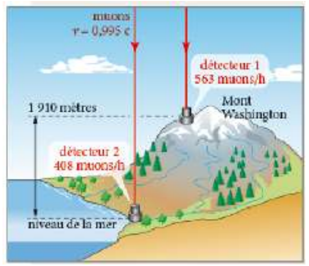
$\Delta a = \dfrac{2 \times 4,23 \times \left(1 - \sqrt{1 - 0,99^2}\right)}{0,99} = 7{,}34\,\text{an}$

Le jumeau resté sur Terre est plus vieux de 7,34 an que son jumeau qui a voyagé !

2. Les muons du rayonnement cosmique

Doc. p. 246 : La relativité du temps à l'épreuve de l'expérience

La théorie de la relativité du temps a été confirmée par de nombreuses expériences. Examinons une première confirmation expérimentale. Si on observe un grand nombre de particules instables et identiques dans un référentiel où elles sont immobiles, en moyenne la moitié de ces particules se seront désintégrées après une durée $t_{1/2}$, appelée demi-vie. Les muons sont des particules instables dont la demi-vie est $t_{1/2}$=1,53 μs. Ces muons sont produits abondamment par interaction entre le rayonnement cosmique et l'atmosphère.



Expérience
Dans l'expérience de Rossi et Hall en 1941, un détecteur est réglé pour détecter les muons se déplaçant au voisinage d'une verticale par rapport à la Terre et de vitesse moyenne v = 0,995 c. Ce détecteur est situé à 1 910 mètres d'altitude au sommet du Mont Washington (États-Unis) et enregistre 563 $\pm$ 10 muons par heure. Un deuxième détecteur, identique, est situé au niveau de la mer et enregistre 408 $\pm$ 9 muons par heure.

Prévision
Mesurée dans le référentiel terrestre, la durée nécessaire pour qu'un muon parcoure une distance de 1 910 mètres est 6,40 μs, soit près de quatre fois sa demi-vie ($t_{1/2} = 1{,}53$ μs). S'il y avait en moyenne 563 muons par heure au sommet, on s'attendrait à en observer environ 563/24 au niveau de la mer, soit une trentaine seulement. L'incompatibilité entre prévision et expérience s'explique par la dilatation du temps, car dans le référentiel où un muon est immobile, il s'est écoulé seulement 0,64 μs pour ce parcours. L'évolution en fonction du temps du nombre de particules restantes obéit à une loi dite de décroissance. En appliquant cette loi pour la durée de parcours de 0,64 μs, on trouve 421 $\pm$ 8 muons par heure détectés au niveau de la mer.

1. Analyser les documents

a. Que signifient les indications $\pm$ 10 et $\pm$ 9 associées au nombre de muons détectés ?

Il s'agit des incertitudes de mesures.

b. Expliquer l'expression « dilatation du temps » utilisée à la ligne 20.

La durée Δt_m du parcours du muon mesurée dans le référentiel terrestre est plus grande que cette même durée Δt_p mesurée dans le référentiel du muon (référentiel propre).
$\Delta t_m = \gamma \Delta t_p$

2. Interpréter les documents

a. En exploitant la définition donnée dans les trois premières lignes du texte, justifier la valeur numérique annoncée ligne 19 et la comparer avec la valeur mesurée.

À t = 0 s, 563 muons par heure sont détectés dans le référentiel terrestre en haut du mont Washington.
Au bout de $t_{1/2}$, il reste : 563/2 muons.
Au bout de $2t_{1/2}$, il reste : $563/2^2$ muons.
Au bout de $4t_{1/2}$, il reste : $563/2^4 = 35$ muons.
On détecte 408 muons au lieu des 35 prévus.

b. La durée Δt_p du parcours mesurée dans le référentiel où la particule est immobile s'appelle la durée propre. Elle est liée à la durée mesurée Δt_m. Justifier la valeur annoncée pour la durée de parcours des muons.
$\Delta t_p = \Delta t_m \sqrt{1 - \beta^2}$
$\Delta t_p = 6,40 \times \sqrt{1 - 0,995^2}$
$\Delta t_p = 6{,}39 \times 10^{-1}\ \mu\text{s}$

c. Le nombre de particules mesuré au niveau de la mer est-il compatible avec les prévisions théoriques ?

$399 \leq n_{mesure} \leq 417$
$413 \leq n_{theorique} \leq 429$
Il y a recouvrement sur l'intervalle [413, 417]. Les intervalles de confiance des deux valeurs ont une intersection commune. Les résultats théoriques et expérimentaux sont en accord.

3. Conclure : Rédiger une synthèse pour expliquer en quoi cette expérience valide la théorie de la relativité du temps.

Les muons atmosphériques ont, selon la conception classique d'un temps universel, une durée de demi-vie si courte que la plupart d'entre eux devraient être désintégrés avant d'arriver au niveau de la mer.
La relativité donne une explication cohérente : la durée Δt_p du déplacement d'un muon mesurée dans son référentiel propre est plus courte que la durée Δt_m mesurée dans le référentiel terrestre. Cette durée Δt_p est assez courte pour qu'une grande partie des muons « reste en vie » pendant le parcours.
Le résultat de l'expérience valide la théorie de la « dilatation des durées ».