P8 – Travail et énergie
Mécanique du point

« If I were a medical man, I should prescribe a holiday to any patient who considered his work important. »

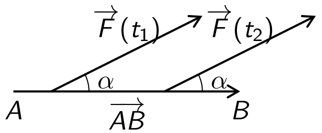
Bertrand Russell, *Autobiography*.

I. Travail d'une force

1. Expression du travail

Les systèmes mécaniques échangent de l'énergie par l'intermédiaire des forces. Le travail d'une force représente l'énergie échangée par une force avec le système sur lequel elle s'exerce.

Travail d'une force $\vec{F}$ constante lors d'un déplacement rectiligne du point A au point B :



$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}}$$

$W_{A\to B}(\vec{F})$: travail de la force (J)
$\vec{F}$: force (N)
$\overrightarrow{AB}$: déplacement (m)

En fonction de l'angle formé par les vecteurs :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\alpha}$$

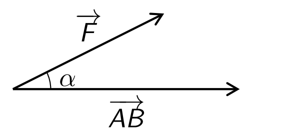
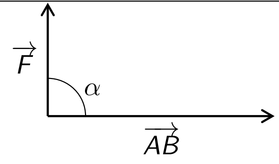
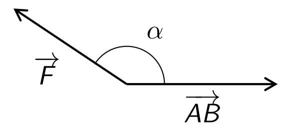
$W_{A\to B}(\vec{F})$: travail de la force (J)
$\vec{F}$: force (N)
$\overrightarrow{AB}$: déplacement (m)
α : angle $(\vec{F},\overrightarrow{AB})$

En fonction des coordonnées des vecteurs :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = x_F x_{AB} + y_F y_{AB} + z_F z_{AB}}$$

Ex. 3 p. 234 : travail d'une force constante

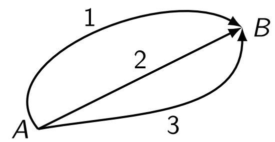
Trois cas peuvent se présenter :

		
$0° \leq \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha \leq 180°$
$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha = 0$	$\cos\alpha < 0$
$W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$ travail moteur	$W_{A\to B}(\vec{F}) = 0$ travail nul	$W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$ travail résistant

Remarques : travail nul
- Sans déplacement une force ne travaille pas !
- Une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas !

2. Forces conservatives

Dans un plan ou un espace tridimensionnel il existe une infinité de chemins d'un point A à un point B.



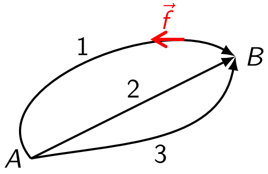
Définition : force conservative
Une force $\vec{F}$ est conservative si son travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ est indépendant du chemin $A \to B$ suivi.

Exemples de forces conservatives
- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, le travail dépend uniquement de l'altitude de départ et d'arrivée.
- La force élastique d'un ressort $\vec{F}_e = -k\vec{x}$
- La force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$; Ex. 5 p. 234 : travail d'une force électrique

3. Forces non conservatives

Pour une force $\vec{F}$ non conservative le travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ dépend du chemin $A \to B$ suivi.

Exemple de force non conservative
Les forces de frottements $\vec{f}$ ne sont pas conservatives, leur travail résistant dépend de la longueur du chemin suivi et de la vitesse le long de celui-ci.



À vitesse constante :
$|W_1(\vec{f})| > |W_3(\vec{f})| > |W_2(\vec{f})|$

II. Énergies

1. Énergie cinétique

L'énergie cinétique est l'énergie contenue dans le mouvement d'un objet :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

E_c : énergie cinétique (J)
m : masse (kg)
v : vitesse instantanée ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Rappel : vitesse instantanée

$$v = \|\vec{v}\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\right)^2}$$

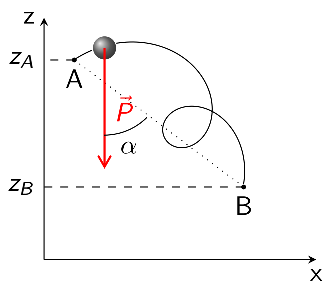
2. Relation entre énergie potentielle et travail

Pour une force conservative, le travail est associée à une variation d'énergie potentielle :

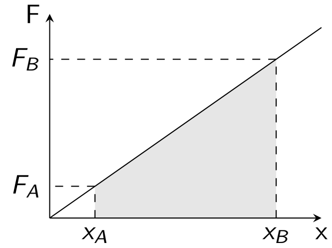
$$\boxed{\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B}(\vec{F})}$$

E_p : énergie potentielle (J)
$\vec{F}$: force conservative (N)

Énergie potentielle de pesanteur
$\Delta E_{pp} = -W_{A\to B}(\vec{P}) = -\vec{P}\cdot\overrightarrow{AB}$
$\Delta E_{pp} = -(x_P x_{AB} + y_P y_{AB} + z_P z_{AB})$
$\vec{P}$ est vertical, dirigé vers le bas (champ uniforme)
donc $x_P = y_P = 0$ et $z_P = -mg$
$\Delta E_{pp} = -z_P z_{AB}$
$\Delta E_{pp} = mg(z_B - z_A)$
On retrouve l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz$
Ex. 4 p. 234 : travail de la force de pesanteur



Énergie potentielle élastique
$\Delta E_{pe} = -W_{A\to B}(\vec{F}_e) = -\vec{F}_e(x)\cdot\overrightarrow{AB}$
$\Delta E_{pe} = -\int_A^B -k\vec{x}\cdot\mathrm{d}\,\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} kx\,\mathrm{d}\,x$
$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$
$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$



3. Énergie mécanique

L'énergie mécanique est la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

E_m : énergie mécanique (J)
E_c : énergie cinétique (J)
E_p : énergie potentielle (J)

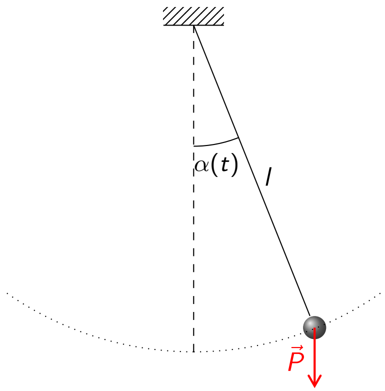
Conservation de l'énergie mécanique
Pour un système isolé (qui n'est pas soumis à des forces de frottements) :
- $E_m = cste$
- $\Delta E_m = 0$
- $\Delta E_c = -\Delta E_p$

L'énergie cinétique est entièrement convertie en énergie potentielle et réciproquement.

Ex. 6 p. 234 : calcul d'énergie mécanique

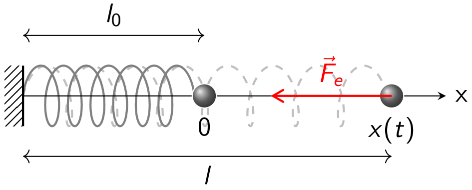
III. Oscillateurs

1. Exemples d'oscillateurs mécaniques



Pendule simple
- Force de rappel : poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- $T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- La période est indépendante de la masse du pendule.

Ex. 10 p. 235 : analyse dimensionnelle



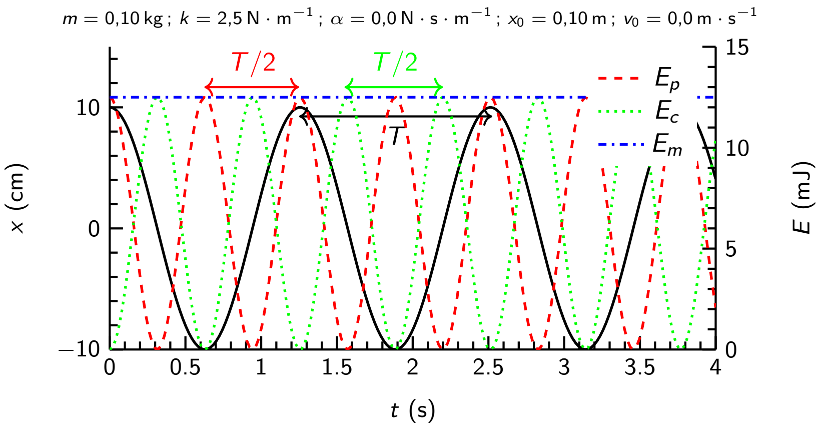
Oscillateur élastique

- Force de rappel : force élastique $\vec{F}_e = -k\vec{x}$
- k : raideur du ressort ($N \cdot m^{-1}$) $x = l - l_0$: élongation (m)
- $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Ex. 26 p. 240 : horloge de Harisson

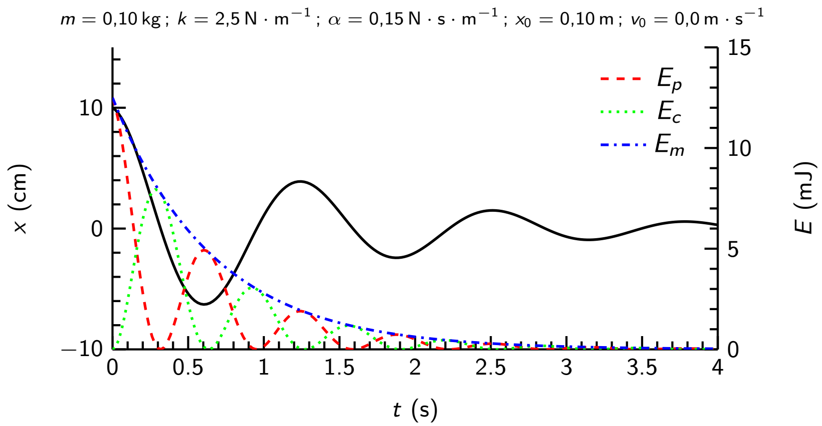
2. Échanges d'énergie d'un oscillateur

Oscillateur idéal, régime périodique : $x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$



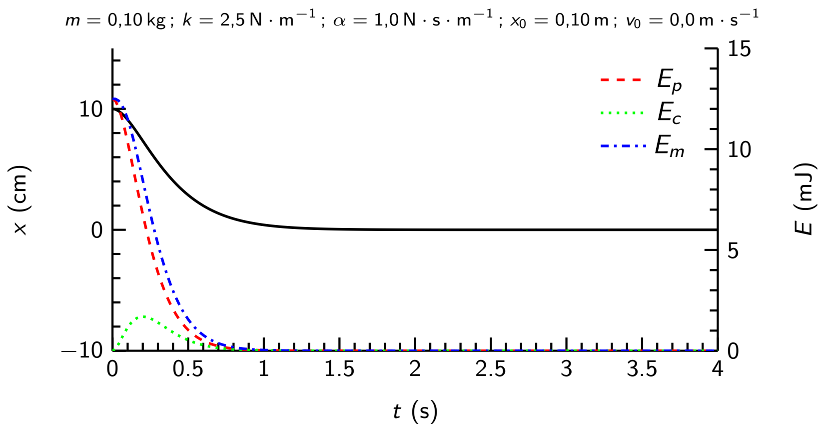
La périodicité du déplacement est le double de celles des échanges énergétiques.

Oscillateur amorti, régime pseudo-périodique : $x(t) = x_0\, e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}\, t\right)$



L'énergie mécanique est dissipée par les frottements.

Oscillateur amorti, régime critique : $x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2m}\, t\right) e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$



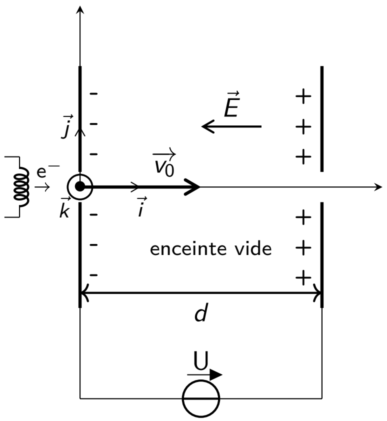
L'énergie mécanique est dissipée pendant la première oscillation.

IV. Application : accélération d'une particule chargée

1. Résolution par le PFD

Pour accélérer un électron (ou une particule chargée), on la fait passer dans un champ électrique uniforme entre deux électrodes planes percées de deux trous.

On veut connaître la vitesse de la particule à la sortie des électrodes.



Bilan des forces sur un électron (e^-) :

Force électrique $\vec{F} = q\vec{E} = \dfrac{eU}{d}\,\vec{i}$

Poids $\vec{P}$ négligeable ($P \ll F$).

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m_e\vec{a} = \vec{F}$$

$$m_e\vec{a} = \frac{eU}{d}\,\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{eU}{m_e d}\,\vec{i} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} \dfrac{eU}{m_e d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = \dfrac{d\,\vec{v}}{d\,t}$ donc $\vec{v}$ est une primitive de $\vec{a}$:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{eU}{m_e d}\,t + C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = C_3 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0} = v_0\vec{i}$:

$$C_1 = v_x(0) = v_0$$
$$C_2 = v_y(0) = 0$$
$$C_3 = v_z(0) = 0$$

On obtient les équations de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{eU}{m_e d}\,t + v_0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$\vec{v} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,t}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est une primitive de $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU}{m_e d}\,t^2 + v_0 t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = C_6 \end{cases}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$:

$$C_4 = x(0) = 0$$
$$C_5 = y(0) = 0$$
$$C_6 = z(0) = 0$$

On en déduit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{eU}{2m_e d}\,t^2 + v_0\,t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

À la sortie du dispositif accélérateur : $x(t_d) = d$

$$\frac{eU}{2m_e d}\,t_d^2 + v_0\,t_d - d = 0$$

$$t_d = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4\dfrac{eU}{2m_e d}d}}{2\dfrac{eU}{2m_e d}},\ t_d > 0$$

$$t_d = \frac{m_e d}{eU}\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m_e}} - v_0\right)$$

$$v_d = \frac{eU}{m_e d}\,t_d + v_0$$

$$v_d = \frac{eU}{m_e d}\frac{m_e d}{eU}\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m_e}} - v_0\right) + v_0$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m_e}}$$

2. Résolution par la variation d'énergie cinétique

On obtient le même résultat, mais bien plus rapidement, en calculant la variation d'énergie cinétique.

Dans le vide l'électron est isolé : $\Delta E_m = 0$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = W_{0\to d}(\vec{F})$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m_e(v_d^2 - v_0^2)$$

$$W_{0\to d}(\vec{F}) = -e\vec{E}\cdot d\vec{i} = e\frac{U}{d}\vec{i}\cdot d\vec{i} = eU$$

$$\frac{1}{2}m_e(v_d^2 - v_0^2) = eU$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m_e}}$$

$v_0 \leq 2{,}9 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ est négligeable, U=10 kV

$$v_d = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^3}{9{,}1 \times 10^{-31}}} = 5{,}9 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'électron est relativiste !